



Aalborg Universitet

AALBORG UNIVERSITY  
DENMARK

## Noter til betonkonstruktioner

Mortensen, Niels Lambert

*Publication date:*  
1988

*Document Version*  
Også kaldet Forlagets PDF

[Link to publication from Aalborg University](#)

*Citation for published version (APA):*  
Mortensen, N. L. (1988). *Noter til betonkonstruktioner*. U/ Nr. 8801

### General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal -

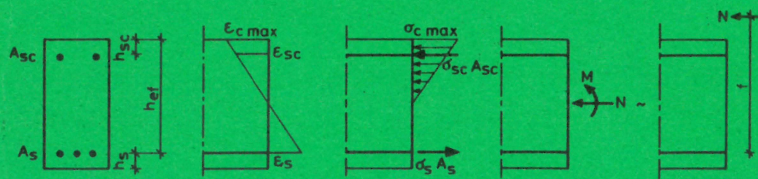
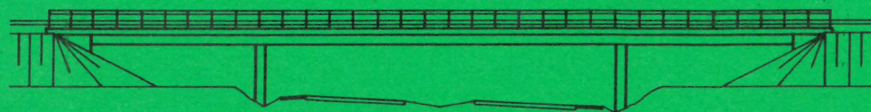
### Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at [vbn@aub.aau.dk](mailto:vbn@aub.aau.dk) providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

# INSTITUTTET FOR BYGNINGSTEKNIK

INSTITUTE OF BUILDING TECHNOLOGY AND STRUCTURAL ENGINEERING

AALBORG UNIVERSITETSCENTER · AUC · AALBORG · DANMARK



N. LAMBERT MORTENSEN  
NOTER TIL BETONKONSTRUKTIONER  
JANUAR 1988

ISSN 0902-8005 U8801

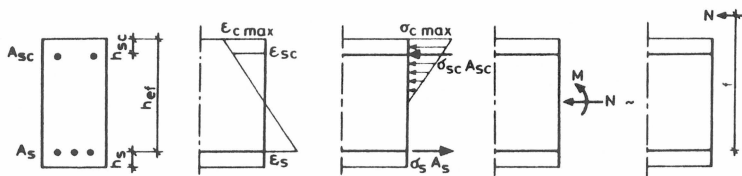
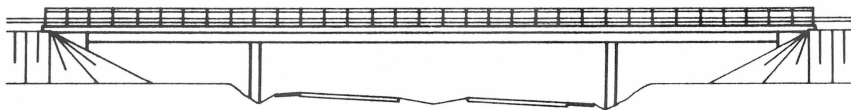
RATHKJEN

---

# INSTITUTTET FOR BYGNINGSTEKNIK

INSTITUTE OF BUILDING TECHNOLOGY AND STRUCTURAL ENGINEERING  
AALBORG UNIVERSITETSCENTER · AUC · AALBORG · DANMARK

---







# INDHOLDSFORTEGNELSE

	Side
FORORD	
1. CENTRALT BELASTEDE SØJLER	1
1.1 Uarmerede søjler	2
1.2 Armerede søjler	3
Eksempel 1.1 Bæreevnebestemmelse	7
2. TVÆRBELASTEDE OG EXCENTRISK BELASTEDE SØJLER	9
2.1 Generelt om snitkraftbestemmelse	9
2.2 Bestemmelse af 2. ordens udbøjningen $e_2$ , generelt	13
2.3 Bestemmelse af $e_2$ efter metode II	14
Eksempel 2.1 Bæreevnebestemmelse efter metode II	15
2.4 Bestemmelse af $e_2$ efter metode I	17
Eksempel 2.2 Bæreevnebestemmelse efter metode I	18
3. BØJNING AF ARMEREDE BETONBJÆLKER EFTER ELASTICITETSTEORIEN	22
3.1 Urevnet tværsnit	23
Eksempel 3.1 Spændingsbestemmelse	26
3.2 Revnet tværsnit	27
Eksempel 3.2 Spændingsbestemmelse	30
Eksempel 3.3 Spændingsbestemmelse	32
4. DIMENSIONERING AF BJÆLKER M.H.T. BØJNING, REKTANGULÆRT TVÆRSNIT	34
4.1 Ren bøjning	34
4.2 Bøjning med normalkraft	39
ØVELSE 1-4	44-47
LITTERATURFORTEGNELSE	48

## FORORD

Denne note er udarbejdet som supplement til de lærebøger, der i øjeblikket anvendes i undervisningen i betonkonstruktioner på anlægssektorens 4. semester på AUC.

Noten fremstår derfor ikke som et sammenhængende hele men snarere som en samling mindre noter, hvis rækkefølge kunne have været anderledes.

Bagest i heftet er medtaget nogle øvelser, som kan indgå i betonkurset.

Teksten er maskinskrevet af Ulla Pedersen. Figurerne er tegnet af Ingrid Christensen og June Warming.

## 1. CENTRALT BELASTEDE SØJLER

### 1.1 Uarmerede

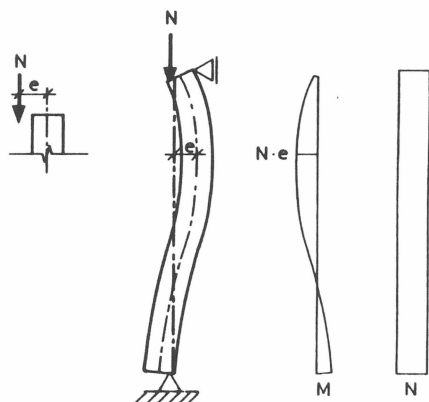
### 1.2 Armerede

## 1. CENTRALT BELASTEDE SØJLER

Centralt belastede søjler eksisterer ikke i praksis. Det skyldes uundgåelige excentriciteter ved påførsel af laster, og at søjlerne p.gr.a. fremstillingsunøjagtigheder og/eller uens svind eller temperaturpåvirkning har forhåndskrumninger. Når Eulers (Engessers 1.) søjleteori alligevel kan anvendes som grundlag for bæreevnebestemmelsen, skyldes det, at det giver bæreevner, som er i overensstemmelse med forsøgsresultater, når blot excentriciteterne og afvigelserne fra den retliniede form er tilpas små, og når visse krav m.h.t. armeringsføring og tværsnitsudformning er overholdt. Se DS 411 afsnit 6.2.5.3, 6.4.3.3 og 6.4.3.4.

Søjlen vist i fig. 1.1 kan ikke beregnes som centralt belastet, idet excentriciteten  $e$  er for stor.

Excentriciteten  $e$  må højst være  $\frac{1}{5}$  af betontværsnittets mindste kærneradius.



Figur 1.1. Excentrisk påvirket søjle.

### 1.1 Uarmerede søjler

Bæreevnen bestemmes p.gr.a. Engessers 1. søjleteori, idet betonens arbejdslinie er blød elastisk.

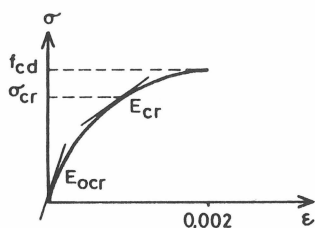
$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E_{cr}}{\lambda^2} \quad (1)$$

$E_{cr}$  er tangenthældningen svarende til spændingen  $\sigma_{cr}$ .

$\lambda$  er forholdet mellem søjlens fri længde og tværsnittets inerti radius i udbøjningsretningen.

Ifølge DS 411 kan E-modulet regnes at aftage retliniet med spændingen efter følgende udtryk (se også fig. 1.2):

$$E_{cr} = E_{ocr} \left( 1 - \frac{\sigma_{cr}}{f_{cd}} \right) \quad (2)$$



Figur 1.2. Betonens arbejdslinie.

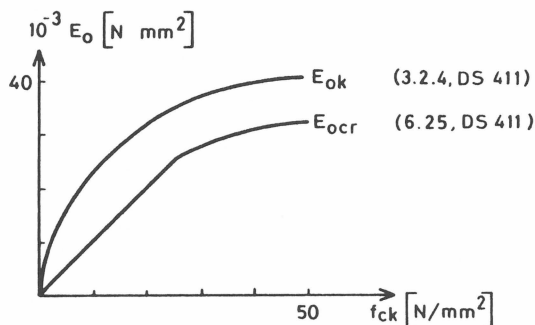
Indsættes (2) i (1) findes den kritiske betontrykspænding til:

$$\sigma_{cr} = \frac{f_{cd}}{1 + \frac{f_{cd}}{\pi^2 \cdot E_{ocr}} \cdot \lambda^2} \quad (3) \quad (v.6.2.5.1.a)$$

Den regningsmæssige værdi af betonens tangenthældning i begyndelsespunktet,  $E_{ocr}$ , kan jfr. DS 411 bestemmes som

$$E_{ocr} \leq \begin{cases} 1000 f_{cd} \\ \frac{3}{4} E_{od} \end{cases} \quad (4), \quad \text{hvor } E_{od} = \frac{1}{\gamma} \left( 51000 \frac{f_{ck}}{f_{ck} + 13} \right) \quad (5)$$

I fig. 1.3 er  $E_{ocr}$  sammenlignet med  $E_{ok}$ .  $E_{ok}$  er baseret på forsøg. I søjleberegningerne benyttes altså, på den sikre side, en mindre værdi. Når  $\sigma_{cr}$  er bestemt af (3), bestemmes søjlens bæreevne  $N_{cr}$  af  $N_{cr} = \sigma_{cr} \cdot A_c$ , hvor  $A_c$  er tværsnitsarealet. Styrkekravet er  $N_{cr} \geq N_d$ .



Figur 1.3. Betonens begyndelsestangenthældning, karakteristiske værdier.

## 1.2 Armerede søjler

Armeringen placeres således, at armeringsarealernes tyngdepunkt er sammenfaldende med betontværsnittets. Armeringen skal



Figur 1.4. Armeret tværsnit.

fastholdes mod udknækning af bøjler. En nøjagtig beregning af den armerede søjles bæreevne vil være ret kompliceret p.g.r.a. betonens ikke-lineære elastiske arbejdslinie.

Armeringen vil forøge søjlens stivhed og dermed forøge søjlens kritiske spænding,  $\sigma_{cr}$ .

Armeringens bidrag kan medregnes ved at bestemme  $i = \sqrt{\frac{I_{zt}}{A_t}}$  for det transformerede tværsnit. Men da  $E_{cr}$  afhænger af spændingen



Figur 1.5. Transformeret tværsnit.

$\sigma_{cr}$ , som ikke kendes på forhånd, må  $\alpha = \frac{E_{sd}}{E_{cr}}$  skønnes og omregning finde sted, indtil der er overensstemmelse mellem  $E_{cr}$  og  $\sigma_{sr}$ .

Med den fundne værdi af  $\sigma_{cr}$  kan søjlens tøjning,  $\epsilon_{cr}$ , bestemmes af betonens arbejdslinie, og armeringens bidrag kan nu bestemmes, idet tøjningen i armeringen også er  $\epsilon_{cr}$ .



Figur 1.6. Bestemmelse af  $\sigma_{sd}$ .

$$N_{cr} = A_c \cdot \sigma_{cr} + A_{sc} \sigma_{sd}$$

Den skitserede fremgangsmåde er for omstændelig til praktisk brug.

DS 411 tillader følgende forenkede beregning: Ved bestemmelse af  $\sigma_{cr}$  ses bort fra armeringens gunstige indvirkning på stivheden, idet  $\sigma_{cr}$  bestemmes som for en uarmeret søjle (3). Denne tilnærmelse er på den sikre side.

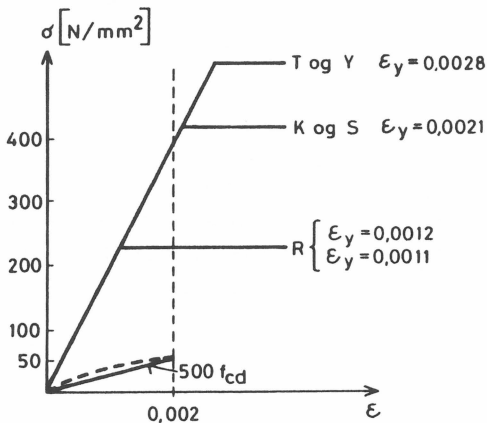
Betonens bidrag til bæreevnen bliver  $\sigma_{cr} \cdot A_c$ . Armeringens bi-



drag til bæreevnen findes ved at bestemme søjlens (og hermed armeringens) tøjning svarende til den fundne værdi af  $\sigma_{cr}$ .

Ved bestemmelse af tøjningens tilnærmes betonens arbejdslinie med en ret linie med  $E_{cd} = 500 f_{cd}$ . Denne arbejdslinie er sammenfaldende med betonens rigtige krumme arbejdslinie for  $\epsilon = 0.002$ , idet de begge giver spændingen  $f_{cd}$ .

Af fig. 1.7 ses, at den tilnærmede arbejdslinie, for en given værdi af  $\sigma_{cr}$ , giver for store tøjninger og derfor for store armeringsspændinger. Tilnærmelsen er altså på den usikre side.



Figur 1.7. Arbejdslinier for beton og armering.

Armeringens bidrag til bæreevnen bliver  $\sigma_s A_s$ . Hvis tøjningen svarende til  $\sigma_{cr}$  er mindre end armeringens flydetøjning er

$$\sigma_{sc} = E_{sd} \epsilon_{cr} = E_{sd} \frac{\sigma_{cr}}{500 f_{cd}} = \frac{E_{sd}}{500 f_{cd}} \cdot \sigma_{cr} = \alpha \cdot \sigma_{cr}$$

Indføres  $\varphi = \frac{A_s}{A_c}$  fås bæreevnen

$$N_{cr} = A_c \cdot \sigma_{cr} + A_{sc} \alpha \sigma_{cr} = \sigma_{cr} A_c (1 + \alpha \varphi) \quad (6)$$

Når  $\epsilon_{cr} > \epsilon_y$  er  $\sigma_{sd} = f_{ycd}$  og bæreevnen bliver

$$N_{cr} = A_c \cdot \sigma_{cr} + A_{sc} \cdot f_{ycd} \quad (7)$$

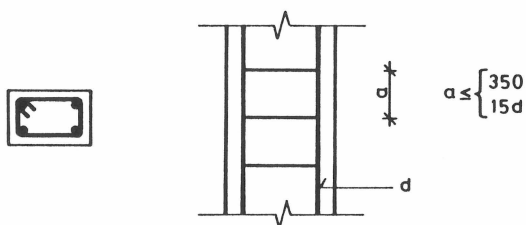
Af bæreevneudtrykkene (6) og (7) ses, at man kan øge bæreevnen af et givet betontværsnit ved at øge armeringsarealet. DS 411 sætter dog en øvre grænse. Når der anvendes overlappingsstød, må armeringens bidrag højst udgøre 50% af betonens, og når der ikke anvendes overlappingsstød højst 100%.

Sammenfattende kan den armerede søjles bæreevne bestemmes som den mindste værdi af

$$N_{Cr} \leq \begin{cases} \sigma_{Cr} A_C (1 + \alpha \varphi) \\ \sigma_{Cr} A_C + f_{yCd} A_{Sc} \\ 2 \sigma_{Cr} A_C \\ 1,5 \sigma_{Cr} A_C \end{cases} \quad (8) \quad (v.6.2.5.1.b) \text{ i DS 411}$$

### Armering i søjler

Ifølge DS 411 skal armerede søjler (og vægge), der kan regnes som centralt belastede, forsynes med et armeringsareal, som udgør mindst 75% af det nødvendige betonareal. Trykarmering, der tages i regning, skal fastholdes mod udknækning af bøjler, se iøvrigt 6.4.3.3 og 6.4.3.4 i DS 411.



Figur 1.8. Længde- og tværarmering.

### Anvendelse

Det anførte udtryk for  $N_{Cr}$  (8) gælder, som tidligere anført, for slapt armerede centralt påvirkede søjler og vægge.

Ifølge DS 411 6.2.5.3 kan en søjle regnes centralt påvirket, når normalkraftens excentricitet er højst  $\frac{1}{5}$  af betontværsnittets mindste kærneradius.

DS 411 giver også mulighed for at anvende (8) på armerede søjler, i husbygning, som er støbt i et med bjælker eller plader, idet der tages hensyn til excentriciteten ved en forøgelse af søjlens normalkraft.

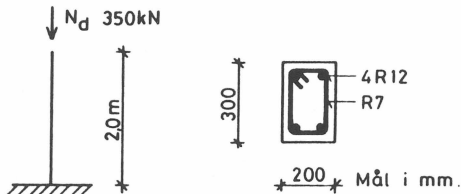
### Eksempel 1.1: Bæreevnebestemmelse

Undersøg om bæreevnen af søjlen vist i fig. 1.9 er tilstrækkelig. Normalkraften angribes centralt.

$$\text{Beton: } f_{ck} = 20, \quad f_{cd} = \frac{20}{1,8} = 11,1 \text{ MPa}$$

$$\text{Arm: R. } f_{yk} = 235, \quad f_{yd} = \frac{235}{1,4} = 167 \text{ MPa}$$

(KKL: normal, SIK: normal, MK: moderat)



Figur 1.9. Armeret betonsøjle.

1. Bestem  $\sigma_{Cr}$

$$i = \sqrt{\frac{I_c}{A_c}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{12} \cdot h \cdot b^3}{b \cdot h}} = \frac{b}{\sqrt{12}} = \frac{200}{\sqrt{12}} \text{ mm} \quad ; \quad l_s = 21$$

$$\lambda^2 = \left(\frac{l_s}{i}\right)^2 = 12 \left(\frac{4000}{200}\right)^2 = 4800$$

$$E_{od} = \frac{1}{1,8} \left( 51000 \cdot \frac{20}{20+13} \right) = 17,2 \cdot 10^3 \text{ MPa}$$

$$E_{ocr} \leq \begin{cases} 1000 \cdot 11,1 & = 11,1 \cdot 10^3 \text{ MPa} \\ 0,75 \cdot 17,2 \cdot 10^3 & = 12,9 \cdot 10^3 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\frac{f_{cd}}{\pi^2 \cdot E_{ocr}} = \frac{11,1}{\pi^2 \cdot 11,1 \cdot 10^3} = 10^{-4} \quad (\text{fås også direkte af tabel V.6.2.5.1 i DS 411})$$

$$\underline{\sigma_{cr}} = \frac{11,1}{1 + 10^{-4} \cdot 4800} = \frac{11,1}{1,48} = 7,5 \text{ N/mm}^2$$

## 2. Bestem $N_{cr}$

$$\alpha = \frac{E_{sd}}{E_{cd}} = \frac{2 \cdot 10^5}{1,4 \cdot 500 \cdot 11,1} = 26 \quad (\text{fås også af tabel V.6.2.5.1 i DS 411})$$

$$N_{cr} \leq \begin{cases} 7,5 \cdot 200 \cdot 300 (1 + 26 \cdot 452 / 200 \cdot 300) \cdot 10^{-3} & = 538 \text{ kN} \\ (7,5 \cdot 200 \cdot 300 + 452 \cdot 167) \cdot 10^{-3} & = 525 \text{ kN} > 350 \text{ kN, } \leq \\ 1,5 \cdot 7,5 \cdot 200 \cdot 300 \cdot 10^{-3} & = 675 \text{ kN} \end{cases}$$

## 2. TVÆRBELASTEDE OG EXCENTRISK BELASTEDE SØJLER

### 2.1 Generelt om snitkraftbestemmelse

### 2.2 Bestemmelse af 2. ordensudbøjningen $e_2$ , generelt

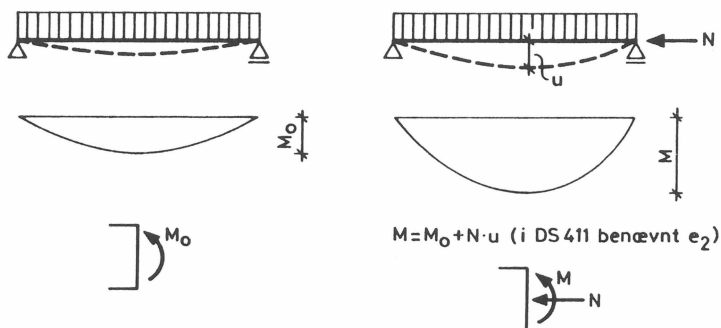
### 2.3 Bestemmelse af $e_2$ efter metode II

### 2.4 Bestemmelse af $e_2$ efter metode I

## 2. TVÆRBELASTEDE OG EXCENTRISK BELASTEDE SØJLER

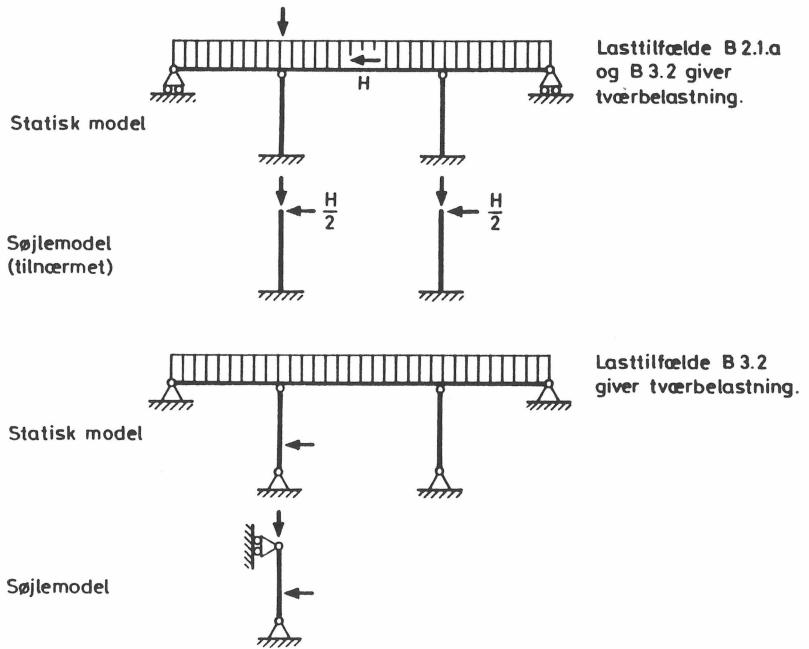
### 2.1 Generelt om snitkraftbestemmelse

Ved bestemmelse af snitkræfterne skal momentforøgelsen p.g.a. udbøjningen medtages.



Figur 2.1. Momentforøgelse

DS 411 anviser tre metoder til bestemmelse af  $u$  ( $e_2$ ), Metode I, Metode II og Metode III. Men først et par eksempler på tværbelastede søjler, se figur 2.2.

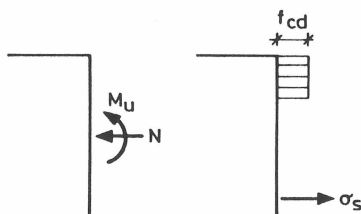


Figur 2.2. Eksempler på tværbelastede søjler.

Beregningsstrategi:

1. Skøn et tværsnit med armering
2. Bestem snitkræfterne i det farligst påvirkede snit. Ved bestemmelsen af  $M$  tages hensyn til udbøjningen, se nedenfor.
3. Eftersvis, at snitkræfterne kan optages v.hj.a.

Metode A: Dvs. vis, at  $M_u > M$  for den givne værdi af  $N$

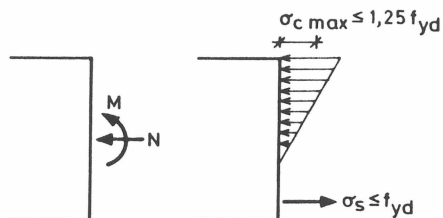


Figur 2.3. Metode A.



eller

Metode B: Dvs. vis, at spændingerne i beton og armering (fra  $M$  og  $N$ ) ikke overstiger brudværdierne (elasticitetsteori,  $\alpha\phi$ -metode).



Figur 2.4. Metode B.

4. Hvis snitkræfterne ikke kan optages, øges tværsnittet og/eller armeringen.

ad 2. Som nævnt ovenfor, skal der tages hensyn til momentforøgelsen på grund af udbøjningen ( $e_2$ ). Der skal også tages hensyn til momentet, som skyldes udførelsesunøjagtigheder ( $e_1$ ), se figur 2.5.

Det max. moment kan skrives som (jfr. DS 411, s. 48):

$$M = M_0 + N(e_1 + e_2)$$

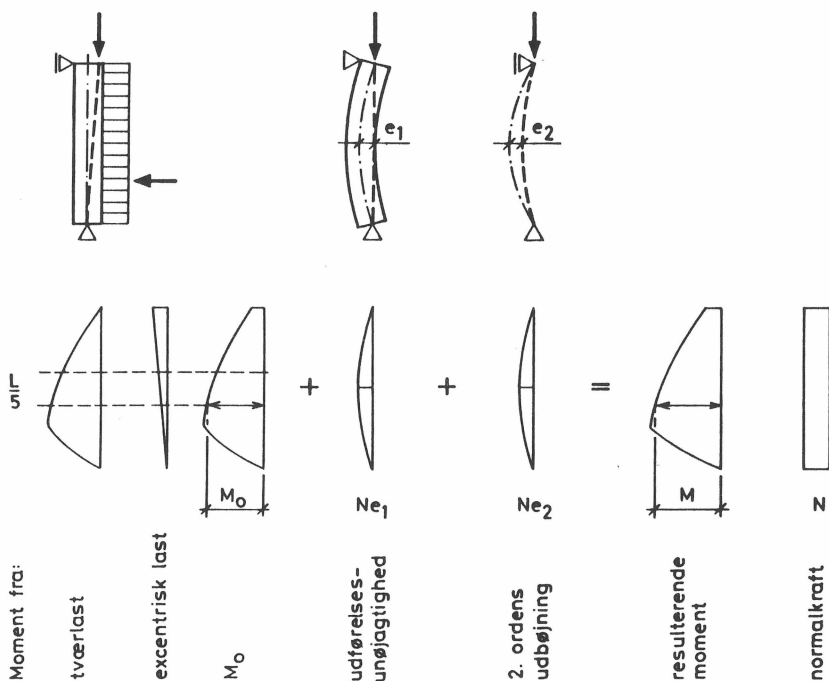
hvor

$M_0$  er det max. moment (inden for den midterste femtedel af spændvidden) hidrørende fra excentrisk last og tværlast, se figur 2.5.

$N$  er normalkraften

$e_1$  er en exc., der skyldes udførelsesunøjagtighed,  $e_1 \sim \frac{L}{500}$

$e_2$  er 2. ordens udbøjningen.



Figur 2.5. Resulterende moment

$$M = M_0 + N \cdot e_1 + N \cdot e_2$$

Problemet består i bestemmelsen af  $e_2$ .

Metode I er en generel metode, som kan anvendes for både armerede og uarmerede søjler og for både revnede og urevnede tværsnit. Den bygger på elasticitetsteorien og anvendes derfor sammen med metode B.

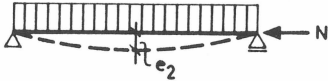
Metode II gælder kun for armerede søjler med revnet tværsnit. Det er en hurtig metode, som bestemmer en udbøjning  $e_2$  på den sikre side (metoden kan derfor være uøkonomisk i nogle tilfælde). Metode II anvendes sammen med metode A eller B.

Metode III, som gælder for uarmerede exc. belastede søjler, vil ikke blive medtaget her.

## 2.2 Bestemmelse af 2. ordens udbøjningen $e_2$ , generelt

Generelt om bestemmelse af  $e_2$ :

(for overskuelighedens skyld ses bort fra  $e_1$ )



Figur 2.6. Resulterende moment.

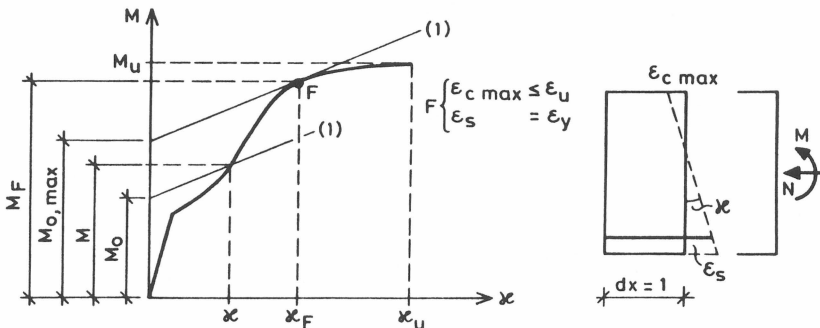
$$M = M_O + e_2 \cdot N$$

$$\text{hvor } e_2 \sim \frac{1}{10} \cdot \kappa_m \cdot L^2$$

$$\text{Dvs. } M = M_O + \frac{1}{10} \cdot \kappa_m \cdot L^2 \cdot N \quad \text{eller}$$

$$M = M_O + \left( \frac{1}{10} \cdot L^2 \cdot N \right) \kappa_m \quad \dots (1)$$

for givet  $M_O$ ,  $N$ ,  $L$  ses (1) at være ligningen for en ret linie i et  $\kappa$ ,  $M$  koordinatsystem. Problemet består nu i at bestemme den rigtige værdi af  $\kappa$ . Den kan bestemmes (f.eks. grafisk), hvis tværsnittets bøjningsarbejdslinie kendes, dvs. sammenhængen mellem moment og krumning (for givet normalkraft).



Figur 2.7. Grafisk bestemmelse af  $M$ .

For given  $M_O$  og  $N$  bestemmes  $\kappa$  og  $M$  ved skæring mellem de to kurver.

Det ses, at de max. værdier af krumning og moment, som kan

give ligevægt, fås, når linien (1) rører bøjningsarbejdslinien i F ( $\kappa_F$ ,  $M_F$ ). Når momentet kommer op på værdien  $M_F$ , fås altså brud (stabilitetsbrud) i søjlen.

En søjle kan altså bryde sammen for et moment og en krumning, som er mindre end værdierne ved ren bøjning ( $\kappa_u$ ,  $M_u$ ).

Styrkekravet er altså  $M < M_F$ .

Punkt F svarer til, at armeringen begynder at flyde.

Den oven for skitserede grafiske fremgangsmåde benyttes ikke i praksis.

### 2.3 Bestemmelse af $e_2$ efter metode II

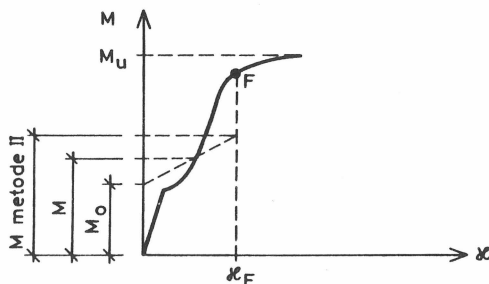
Efter metode II bestemmes  $e_2$  på den sikre side som

$$e_2 \sim \frac{1}{10} \cdot \kappa_F \cdot L^2, \quad \text{hvor } \kappa_F \sim \frac{\epsilon_u + \epsilon_y}{h_{ef}}$$

Det resulterende moment bliver derfor

$$M = M_0 + \frac{1}{10} \kappa_F \cdot L^2 \cdot N$$

og det eftervises, at  $M < M_u$ , hvor  $M_u$  bestemmes v.h.j.a. Metode A eller B.



Figur 2.8.

### Eksempel 2.1: Bæreevnebestemmelse efter metode II

Søjlen i eksempel 1.1 blev undersøgt for central påvirkning, og bæreevnen for dette lasttilfælde blev fundet i orden.

Det ønskes nu undersøgt, om søjlen også har tilstrækkelig bæreevne til at modstå en lastkombination, som foruden normalkraften giver en tværbelastning ved søjletop.

De regningsmæssige laster er som vist på figur 2.9. Øvrige størrelser er som i eksempel 1.1. Der ses bort fra trykarmering.



Figur 2.9. Tværbelastet søjle.

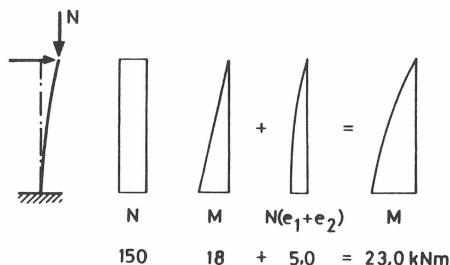
$$M_0 = 9 \cdot 2 = 18 \text{ kNm}$$

$$\text{Skøn } e_1 \sim \frac{L}{500} = \frac{2000}{500} = 4 \text{ mm}$$

$$\text{Beregn } e_2 = \frac{1}{10} \cdot \frac{\epsilon_u + \epsilon_y}{h_{ef}} \cdot (2l)^2 = \frac{1}{10} \cdot \frac{3,5 \cdot 10^{-3} + 1,2 \cdot 10^{-3}}{300 - 40} \cdot 4000^2$$

$$e_2 = 29 \text{ mm} \quad (2l \text{ er søjlens fri længde})$$

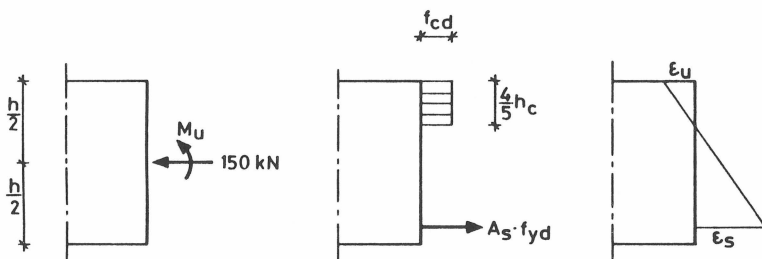
$$\text{Dvs. } M = 18 + (0,004 + 0,029)150 = 23,0 \text{ kNm, se figur 2.10.}$$



Figur 2.10. Snitkræfter.

Undersøg nu, om snitkræfterne  $(N, M) = (150, 23)$  kan optages af tværsnittet.

Metode A anvendes. Der ses bort fra trykarmeringens bidrag til brudmomentet.



Figur 2.11.

Projektion:  $N = f_{cd} \cdot b \cdot \frac{4}{5} \cdot h_c - A_s \cdot f_{yd}$ , heraf fås

$$h_c = \frac{N + A_s \cdot f_{yd}}{\frac{4}{5} b f_{cd}} = \frac{150 \cdot 10^3 + 226 \cdot 167}{\frac{4}{5} \cdot 200 \cdot 11,1} = 106 \text{ mm}$$

$$\epsilon_s = \frac{h_{ef} - h_c}{h_c} \cdot \epsilon_u = \frac{260 - 106}{106} \cdot 0,0035 = 5,1 \cdot 10^{-3} > \epsilon_Y = 1,2 \cdot 10^{-3} \quad \text{OK}$$

Moment om trækresultanten:

$$M_u + N(h_{ef} - \frac{h}{2}) = \frac{4}{5} \cdot b h_c \cdot f_{cd} (h_{ef} - \frac{2}{5} \cdot h_c)$$

$$M_u = \frac{4}{5} \cdot 200 \cdot 106 \cdot 11,1 (260 - \frac{2}{5} \cdot 106) 10^{-6} - 150 (260 - 150) 10^{-3}$$

$$M_u = 41,0 - 16,5 = 24,5 \text{ kNm} > 23,0 \text{ kNm} \quad \text{OK}$$



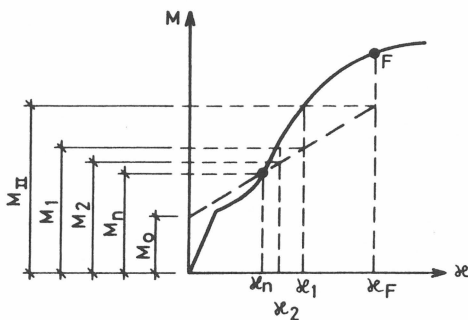
Bæreevnen er altså tilstrækkelig.

Hvis de to R12 i tryksiden medregnes som trykarmering, bliver brudmomentet  $M_u = 26,0 \text{ kNm}$ .

#### 2.4 Bestemmelse af $e_2$ efter metode I

Efter metode I bestemmes en mere korrekt værdi af udbøjningen  $e_2$  svarende til den givne last. Derfor fås også en mere korrekt værdi af  $M$ . Bestemmelsen af  $e_2$  (og  $M$ ) sker ved iteration.

1. Som første skøn af  $e_2$  kan f.eks. benyttes værdien fundet under metode II. Det tilsvarende moment er  $M = M_{II} = M_0 + N_1 \cdot e_1 + e_2 \cdot N$ .
2. Med givne snitkræfter ( $N, M_{II}$ ) bestemmes den tilhørende værdi af krumningen  $\kappa_1$  og herefter det til  $\kappa_1$  svarende moment  $M_1$  ( $M_1 = M_0 + N \cdot e_1 + N \cdot \frac{1}{10} \cdot \kappa_1 \cdot l^2$ ). Med givet ( $N, M_1$ ) bestemmes  $\kappa_2$  og hermed  $e_2$  og  $M_2$ . Beregningerne fortsættes, indtil der er overensstemmelse mellem  $\kappa$  og  $M$ . Dvs. når  $\kappa_{n-1} = \kappa_n$  eller  $e_{2,n-1} = e_{2,n}$ . Så er skæringen mellem de to kurver fundet ( $\kappa_n, M_n$ , jfr. figur 2.12).



Figur 2.12. Grafisk bestemmelse af  $\kappa$ .

3. Beregningerne afsluttes med at eftervise, at spændingerne svarende til ( $N, M_n$ ) ikke overskrider de regningsmæssige brudværdier.

Den max. betonkantspænding skal opfylde betingelserne

$$\sigma_{cmax} \leq \begin{cases} 1,25 \cdot f_{cd} & \text{revnet tværsnit} \\ 1,25 \cdot f_{cd} \left(1 - \frac{\sigma_{c,min}}{f_{cd}}\right) & \text{tryk over hele tværsnittet} \end{cases}$$

Den max. armeringsspænding skal opfylde betingelserne

$$\sigma_{s,max} \leq f_{yd}$$

$$\sigma_{sc,max} \leq f_{ycd}$$

Fremgangsmåden er illustreret nedenfor.

### Eksempel 2.2: Bæreevnebestemmelse efter metode I

Den tværbelastede søjle i eks. 2.1 regnes nu efter metode I.

1. Skøn  $e_2 = 29$  mm (metode II)

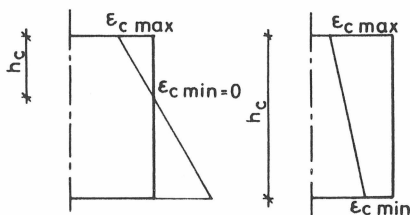
$$\Rightarrow M = 18 + (0,004 + 0,029)150 = 23,0 \text{ kNm}$$

$$\text{Dvs. } (N, M) = (150, 23)$$

2. Bestem  $\kappa$  og  $e_2$  svarende til  $(N, M) = (150, 23)$

$$e_2 \approx \frac{1}{10} \kappa \cdot l^2, \text{ hvor } l \text{ er den fri søjlelængde}$$

$$\text{og } \kappa = \frac{\epsilon_{cmax} - \epsilon_{cmin}}{h_c} = \frac{\sigma_{cmax} - \sigma_{cmin}}{E_{cr} \cdot h_c}$$



Figur 2.13. Tøjningsfordeling i revnet og urevnet tværsnit.

For at bestemme  $\kappa$  er det altså nødvendigt først at bestemme spændingerne. De bestemmes efter elasticitetsteorien ( $\alpha\phi$ -me-

toden). Der henvises til kapitel 3, Bøjning af armerede betonbjælker efter elasticitetsteorien. Da det antages, at tværsnittet er revnet, følges fremgangsmåden i afsnit 3.2.

Ved spændingsbestemmelsen sættes betonens E-modul til  $E_{cr} = 500 \cdot f_{cd}$ .

$$\alpha = \frac{E_{sd}}{E_{cr}} = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 1,8}{1,4 \cdot 500 \cdot 20} = 25,7$$

$$\varphi_c = \varphi = \frac{A_s}{b \cdot h_{ef}} = \frac{226}{200 \cdot 260} = 0,0043$$

$$\delta = \frac{h_{sc}}{h_{ef}} = \frac{40}{260} = 0,154$$

$$f = \frac{M}{N} + \frac{h}{2} - h_s = \frac{23 \cdot 10^6}{150 \cdot 10^3} + \frac{300}{2} - 40 = 263 \text{ mm}$$

$$\beta^3 + 3\left(\frac{263}{260} - 1\right) \cdot \beta^2 + 6 \cdot 25,7[(0,0043 + 0,0043) \frac{263}{260}$$

$$- 0,0043(1 - 0,154)]\beta - 6 \cdot 25,7[(0,0043 \cdot 0,154 + 0,0043) \cdot \frac{263}{260}$$

$$- 0,0043(1 - 0,154)0,154] = 0$$

$$\beta^3 + 0,0346\beta^2 + 0,7805\beta - 0,6876 = 0$$

Løsning:  $\beta = 0,595 \Rightarrow h_c = 154,7 \text{ mm}$

$$\sigma_{cmax} = \frac{150 \cdot 10^3 \cdot 26 \cdot 3}{\frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 154,7(260 - \frac{1}{3} \cdot 154,7) + 25,7 \cdot \frac{154,7 - 40}{154,7} \cdot 226(260 - 40)}$$

$$9,5 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{sc} = 25,7 \cdot \frac{154,7 - 40}{154,7} \cdot 9,5 = 181 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_s = 25,7 \cdot \frac{260 - 154,7}{154,7} \cdot 9,5 = 166 \text{ N/mm}^2$$

Med kendte spændinger kan  $e_2$  nu bestemmes, idet

$$e_2 = \frac{1}{10} \cdot k \cdot l^2 = \frac{1}{10} \cdot \frac{\sigma_{cmax}}{E_{cr} \cdot h_c} \cdot l^2$$

Ved bestemmelse af  $e_2$  kan der tages hensyn til betonens krumme arbejdslinie. DS 411 angiver følgende udtryk

$$E_{cr} = (1 - k \frac{\sigma_{cmax}}{f_{cd}} - (1-k) \frac{\sigma_{cmin}}{f_{cd}}) E_{ocr}$$

hvor  $k = 0,8 - 400 \cdot \frac{f_{cd}}{E_{ocr}}$  og

$$E_{ocr} \leq \begin{cases} 1000 f_{cd} \\ \frac{3}{4} E_{od} \end{cases}, \quad E_{od} = \frac{1}{\gamma_c} \cdot 5100 \frac{f_{ck}}{f_{ck} + 13}$$

Udtrykket for  $E_{cr}$  er udformet således, at det passer i "grænserne".

For  $\sigma_{cmax} = \sigma_{cmin} = 0$  fås  $E_{cr} = E_{ocr}$

For  $\sigma_{cmax} = 1,25 f_{cd}$  og  $\sigma_{cmin} = 0$  fås  $E_{cr} = 500 f_{cd}$

For  $\sigma_{cmax} = \sigma_{cmin} = \sigma_c$  fås  $E_{cr} = E_{ocr} (1 - \frac{\sigma_c}{f_{cd}})$

I dette eksempel fås:

$$E_{cr} = (1 - 0,40 \frac{9,5}{11,1}) \cdot E_{ocr} = 0,658 E_{ocr}$$

$$E_{cr} = 0,650 \cdot 11100 = 7304 \text{ N/mm}^2$$

Dvs.

$$e_2 = \frac{1}{10} \cdot \frac{9,5}{7304 \cdot 154,7} \cdot 4000^2 = 13,5 \text{ mm}$$

Med den netop fundne værdi af  $e_2$  bestemmes et nyt moment

$$M = 18 + (0,004 + 0,0135) \cdot 150 = 20,6 \text{ kNm}$$

Med  $(N, M) = (150, 20,6)$  gentages beregningerne ovenfor.

Spændingsbestemmelse:

$$\alpha = 25,7, \quad \varphi = \varphi_c = 0,0043, \quad \delta = 0,154$$

$$f = \frac{20,6 \cdot 10^6}{150000} + \frac{300}{2} - 40 = 247 \text{ mm}$$

$$\begin{aligned} \beta^3 + 3 \left( \frac{247}{260} - 1 \right) \beta^2 + 6 \cdot 25,7 \left[ (0,0043 \cdot 2) \frac{247}{260} - 0,0043(1 - 0,154) \right] \beta \\ - 6 \cdot 25,7 \left[ (0,0043 \cdot 0,154 + 0,0043) \frac{247}{260} - 0,0043(1 - 0,154) \cdot 0,154 \right] \end{aligned}$$

= 0

$$\beta^3 - 0,1500\beta^2 + 0,6989\beta - 0,6405 = 0$$

Løsning:  $\beta = 0,636 \Rightarrow h_C = 165,4 \text{ mm}$

$$\sigma_{\text{cmax}} = \frac{150 \cdot 10^3 \cdot 247}{\frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 165,4 (260 - \frac{1}{3} \cdot 165,4) + 25,7 \frac{165,4 - 40}{165,4} 226 (260 - 40)}$$

$$\sigma_{\text{cmax}} = 8,5 \text{ N/mm}^2 < 1,25 \cdot f_{\text{cd}} = 13,9 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{\text{sc}} = 25,7 \frac{165,4 - 40}{165,4} \cdot 8,5 = 165 \text{ N/mm}^2 < f_{\text{ycd}} = 167 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_s = 25,7 \frac{260 - 165,4}{165,4} \cdot 8,5 = 125 \text{ N/mm}^2 < f_{\text{yd}} = 167 \text{ N/mm}^2$$

Det ses, at styrkekravene er opfyldt, og beregningerne kan derfor afsluttes allerede på dette sted. Der fortsættes dog lidt endnu for at finde ud af, hvor langt iterationen er nået.

Bestemmelse af  $e_2$  og  $M$

$$e_2 = \frac{1}{10} \cdot \frac{\sigma_{\text{cmax}}}{E_{\text{cr}} \cdot h_C} \cdot l^2$$

$$E_{\text{cr}} = (1 - 0,4 \cdot \frac{8,5}{11,1}) \cdot 11100 = 7700 \text{ N/mm}^2$$

(Bemærk, at  $E_{\text{cr}}$  øges med aftagende spændinger).

$$e_2 = \frac{1}{10} \cdot \frac{8,5}{7700 \cdot 165,4} \cdot 4000^2 = 10,7 \text{ mm}$$

$$M = 18 + (0,004 + 0,0107) \cdot 150 = 20,2 \text{ kNm}$$

Det ses, at det sidst fundne moment kun afviger lidt fra det foregående. En fortsat beregning ville derfor kun medføre en uvæsentlig reduktion af spændingerne.

### 3. BØJNING AF ARMEREDE BETONBJÆLKER EFTER ELASTICITETSTEORIEN

3.1 Bøjning og bøjning med normalkraft af bjælker med rektangulært, urevnet tværsnit

3.2 Bøjning og bøjning med normalkraft af bjælker med rektangulært, revnet tværsnit

3.2.1 ren bøjning

3.2.2 bøjning med normalkraft

### 3. BØJNING AF ARMEREDE BETONBJÆLKER EFTER ELASTICITETSTEORIEN

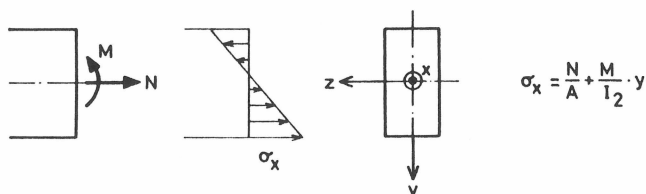
Elasticitetsteorien benyttes både ved vurdering af brudgrænsetilstande og anvendelsesgrænsetilstande. I brudtilstanden er elasticitetsteorien grundlaget for en alternativ metode til bestemmelse af armerede betonbjælkers brudmoment, metode B i DS 411, og for bestemmelse af bjælkesøjlers udbøjning, metode I i DS 411.

I anvendelsestilstanden sker vurderingen af nedbøjninger og revnevidder på grundlag af elasticitetsteorien.

I det følgende redegøres for, hvorledes spændingerne kan bestemmes. Derimod vil anvendelserne, nævnt ovenfor, ikke blive behandlet her.

En mere generel behandling, end den der gives her, findes f.eks. i M.P. Nielsen Beton 1, del 2, 1974, [1].

For homogene tværsnit af lineærelastiske materialer kan Naviers formel benyttes til bestemmelse af normalspændingernes fordeling, jfr. fig. 3.1. Bemærk, at  $N$  er regnet positiv som træk, modsat hvad der er sædvane for betonkonstruktioner, hvor  $N$  regnes positiv som tryk, jfr. fig. 3.2.



Figur 3.1. Homogent tværsnit. Normalspændinger.

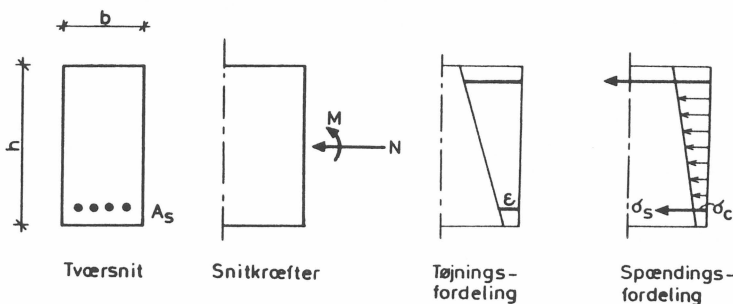


Et armeret betontværsnit består af to forskellige materialer med forskellig elasticitetsmodul. Det er alligevel muligt at benytte Naviers formel, men det kræver, at armeringsarealet først "transformeres" om til betonareal. Det herved fremkomne tværsnit betegnes "det transformerede tværsnit ( $A_t$ )", og det tilhørende inertimoment m.h.t. det transformerede tværsnits (vandrette) tyngdepunktsakse betegnes "det transformerede tværsnits inertimoment ( $I_{z,t}$ )".

Her skal kort redegøres for, hvordan  $A_t$  og  $I_{z,t}$  bestemmes.

Spændingsbestemmelse v.h.a. transformeret tværsnit kan benyttes for både urevnede og revnede tværsnit. Men for revnede tværsnit fører en direkte anvendelse af statiske, geometriske og fysiske betingelser til et hurtigere resultat. Spændingsbestemmelsen deles derfor i to tilfælde: urevnet tværsnit og revnet tværsnit.

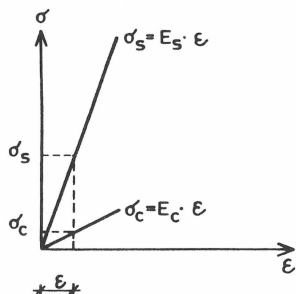
### 3.1 Urevnet tværsnit (stor normalkraft, lille moment)



Figur 3.2. Urevnet tværsnit.

På grund af materialernes forskellige elasticitetsmoduler vil spændingerne være forskellige for samme tøjning, se fig. 3.2 og 3.3.

Betragtes f.eks. den nederste armering og den omkringliggende beton, hvor tøjningen er  $\epsilon$ , fås



Figur 3.3. Arbejdslinier.

$$\sigma_s = E_s \cdot \varepsilon \quad (1)$$

$$\sigma_c = E_c \cdot \varepsilon \quad (2) \rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma_c}{E_c} \quad \text{indsættes i (1):}$$

$$\sigma_s = E_s \cdot \frac{\sigma_c}{E_c} = \frac{E_s}{E_c} \cdot \sigma_c, \quad \sigma_s = \alpha \cdot \sigma_c \quad (3)$$

Af (3) ses, at spændingen i armeringen er  $\alpha$  gange så stor som spændingen i betonen på samme sted (samme afstand fra nullinien).

Kraften i armeringen fås som

$$F_s = \sigma_s \cdot A_s \quad (4)$$

eller idet (3) benyttes

$$F_s = \alpha \sigma_c A_s = \underline{\sigma_c \cdot \alpha A_s} \quad (5)$$

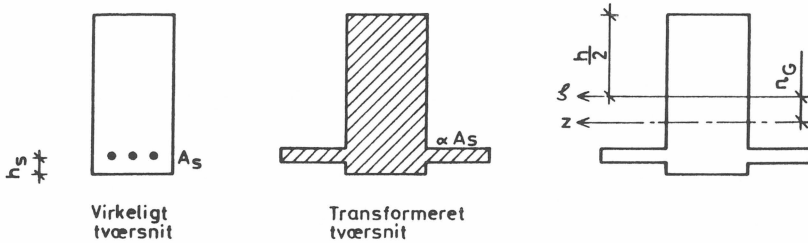
Sammenlignes (4) og (5) ses, at man kan transformere armeringsareal om til betonareal ved at multiplicere med  $\alpha$ , hvor  $\alpha =$

$$\frac{E_s}{E_c}.$$

Det transformerede tværsnitsareal bliver derfor

$$\underline{A_t = A_c + \alpha A_s}, \quad \text{hvor } A_c = b \cdot h - A_s \sim b \cdot h \quad (6)$$

Det transformerede tværsnit kan tænkes etableret ved, at der i stedet for armeringen placeres et tyndfliget betonareal i samme niveau med et areal, der er  $\alpha$  gange så stort som armeringens.



Figur 3.4. Transformering af et tværsnit.

Da tværsnittet nu er homogent, kan tværsnitskonstanterne bestemmes på sædvanlig vis.

Det transformerede tværsnits vandrette tyngdepunktsakse bestemmes f.eks. ved at tage statisk moment om betontværsnittets tyngdepunktsakse.

$$\eta_G = \frac{S_{st}}{A_t} = \frac{\alpha A_s \left( \frac{h}{2} - h_s \right)}{\alpha A_s + b \cdot h} \quad (7)$$

Det transformerede tværsnits inertimoment om z-aksen

$$I_{zt} = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 + \eta_G^2 \cdot b \cdot h + \alpha A_s \cdot \left( \frac{h}{2} - h_s - \eta_G \right)^2 \quad (8)$$

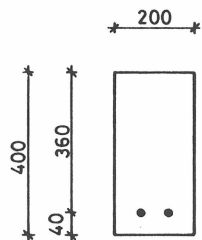
Hvis der forekommer trykarmering, skal den naturligvis også medregnes.

Ved andre tværsnitsformer fås naturligvis andre udtryk for  $A_t$ ,  $\eta_G$  og  $I_{zt}$ , men fremgangsmåden ved bestemmelsen er den samme som vist for det rektangulære tværsnit.

Når tværsnitskonstanterne er bestemt, kan betonspændingerne bestemmes af Naviers formel

$$\sigma = \frac{N}{A_t} + \frac{M}{I_{zt}} \cdot y \quad (9)$$

Ved bestemmelse af armeringsspændinger skal man huske at transformere betonareal tilbage til armeringsareal ved at multiplicere spændingerne fundet efter (9) med  $\alpha$ .

Eksempel 3.1: Spændingsbestemmelse

Givet:  $b \cdot h = 200 \cdot 400 \text{ mm}^2$ ,  $h_{ef} = 360 \text{ mm}$

$$A_s = 628 \text{ mm}^2, \alpha = 15$$

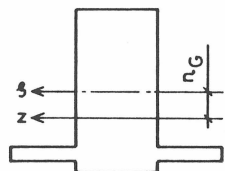
$$M = 12 \text{ kNm}, N = 250 \text{ kN (tryk)}$$

$N$  angriber i betontværsnittets tyngdepunkt, jfr. fig. 3.7.

Bestem: beton- og armeringsspændinger i tværsnittet

Figur 3.5. Tværsnit, mål i mm.

Tværsnitskonstanterne i det transformerede tværsnit bestemmes. Det antages, at der er tryk over hele tværsnittet.



$$A_t = 200 \cdot 400 + 15 \cdot 628 = 89420 \text{ mm}^2$$

$$\eta_G = \frac{15 \cdot 628 (200 - 40)}{200 \cdot 400 + 15 \cdot 628} = 17 \text{ mm}$$

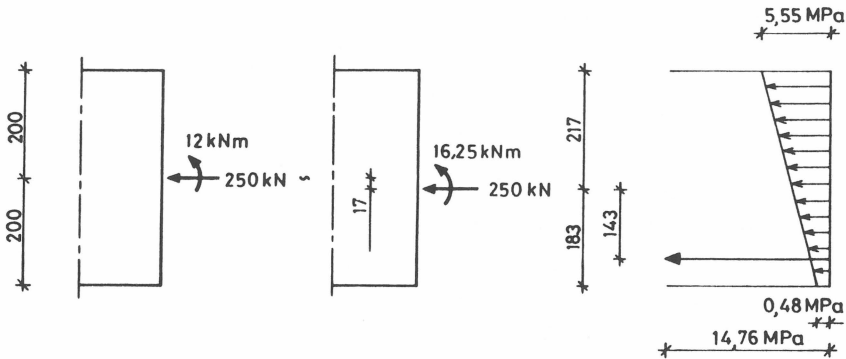
Figur 3.6. Transformeret tværsnit.

$$I_{zt} = \frac{1}{12} \cdot 200 \cdot 400^3 + 200 \cdot 400 \cdot 17^2 + 15 \cdot 628 (160 - 17)^2$$

$$I_{zt} = 1,282 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$$

De givne snitkræfter er henført til betontværsnittets tyngdepunkt. Naviers formel forudsætter imidlertid, at snitkræfterne henføres til det transformerede tværsnits tyngdepunkt. D.v.s. at momentet bliver

$$M = 12 + 250 \cdot 0.017 = 16,25 \text{ kNm}$$



Figur 3.7. Snitkræfter og spændinger.

$$\sigma_{c1} = \frac{-250 \cdot 10^3}{89420} + \frac{16,25 \cdot 10^5}{1,282 \cdot 10^9} \cdot (-217) = -5,55 \text{ MPa}$$

$$\sigma_s = 15 \left( \frac{-250 \cdot 10^3}{89420} + \frac{16,25 \cdot 10^5}{1,282 \cdot 10^9} \cdot 143 \right) = -14,76 \text{ MPa}$$

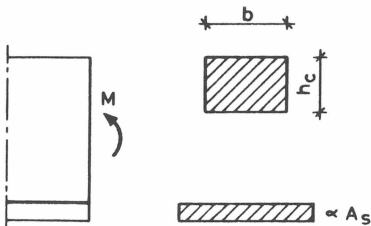
$$\sigma_{c2} = \frac{-250 \cdot 10^3}{89420} + \frac{16,25 \cdot 10^5}{1,282 \cdot 10^9} \cdot 183 = -0,48 \text{ MPa}$$

Det ses, at der, som forudsat, er trykspændinger over hele tværsnittet.

### 3.2. Revnet tværsnit (lille normalkraft, stort moment)

Som ved urevnet tværsnit kan spændingerne bestemmes v.h.a. transformeret tværsnit. Ved bestemmelse af betonens bidrag skal kun det trykkede betonareal medregnes.

For tilfældet ren bøjning vil nullinien være sammenfaldende med det transformerede tværsnits tyngdepunkt. Og nullinien kan



Figur 3.8. Transformeret tværsnit.

derfor let bestemmes ved at tage statisk moment om det transformerede tværsnits tyngdepunkt.

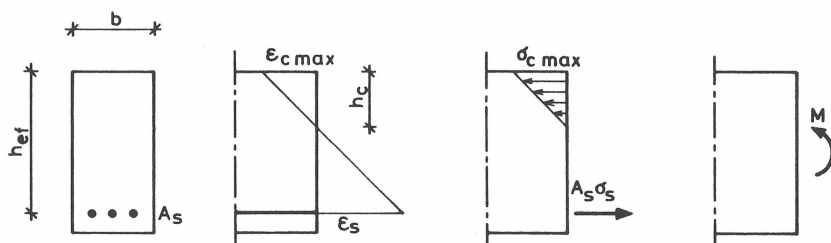
For tilfældet bøjning med normalkraft vil nullinien ikke være sammenfaldende med det transformerede tværsnits tyngdepunkt. Derfor må nullinien bestemmes ved iteration i dette tilfælde.

I det følgende bestemmes spændingerne ved direkte anvendelse af de fysiske, geometriske og statiske betingelser.

### 3.2.1 Ren bøjning se KC s. 33-35

Givet:  $b$ ,  $h_{ef}$ ,  $A_S$ ,  $E_S$ ,  $E_C$ ,  $M$

Bestem:  $\sigma_S$ ,  $\sigma_{Cmax}$



Figur 3.9. Ren bøjning.

Fysiske betingelser:

$$\sigma_S = E_S \epsilon_S \quad (1)$$

$$\sigma_C = E_C \epsilon_C \quad (2)$$

Geometriske betingelser:

$$\frac{\epsilon_S}{\epsilon_{Cmax}} = \frac{h_{ef} - h_C}{h_C} \quad (3)$$

Statiske betingelser:

$$N = 0 = \frac{1}{2} b h_C \sigma_{Cmax} - A_S \sigma_S \quad (4)$$

$$M = \frac{1}{2} b h_C \sigma_{Cmax} (h_{ef} - \frac{1}{3} h_C) \quad (5)$$

$$M = A_S \sigma_S (h_{ef} - \frac{1}{3} h_C) \quad (6)$$

Af (1), (2) og (3) fås

$$\sigma_S = \frac{E_S}{E_C} \frac{h_{ef} - h_C}{h_C} \cdot \sigma_{cmax} \quad (7)$$

Indsættes (7) i (4), kan  $h_C$  bestemmes.

$\sigma_{cmax}$  og  $\sigma_S$  kan herefter bestemmes af (5) og (6).

Indføres dimensionsløse størrelser

$$\varphi = \frac{A_S}{bh_{ef}}, \quad \beta = \frac{h_C}{h_{ef}}, \quad \alpha = \frac{E_S}{E_C}$$

fås

$$\frac{1}{2} bh_C \cdot \sigma_{cmax} - A_S \cdot \alpha \frac{h_{ef} - h_C}{h_C} \cdot \sigma_{cmax} = 0$$

$$\frac{1}{2} \beta^2 + (\alpha\varphi)\beta - (\alpha\varphi) = 0$$

Det ses, at  $\beta$  (og hermed  $h_C$ ) udelukkende er en funktion af produktet  $(\alpha\varphi)$ .

Den brugelige løsning er

$$\beta = -\alpha\varphi + \sqrt{(\alpha\varphi)^2 + 2\alpha\varphi}$$

Indføres endvidere

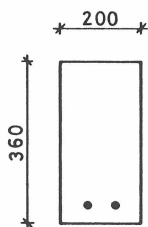
$$\varphi_b = \frac{1}{6} \beta(3-\beta) \text{ og } \gamma = \frac{1-\beta}{\beta}$$

fås af (5) og (7)

$$\sigma_{cmax} = \frac{M}{\varphi_b \cdot b \cdot h_{ef}^2}$$

$$\sigma_S = \alpha\gamma \cdot \sigma_{cmax}$$

I Teknisk Ståbi findes en tabel til bestemmelse af  $\varphi_b$ ,  $\gamma$  og  $\beta$  for givne værdier af  $(\alpha\varphi)$ . (Teknisk Ståbi 15. udgave, side 166).

Eksempel 3.2: Spændingsbestemmelse

Givet:  $b \cdot h = 200 \cdot 400 \text{ mm}^2$ ,  $h_{ef} = 360 \text{ mm}$

$A_s = 628 \text{ mm}^2$ ,  $\alpha = 15$

$M = 12 \text{ kNm}$

Bestem:  $\sigma_{cmax}$  og  $\sigma_s$

Figur 3.10. Tværsnit, mål i mm.

$$\alpha \cdot \varphi = 15 \cdot \frac{628}{200 \cdot 360} = 0,13$$

Teknisk Ståbi s. 166:

$$\varphi_b = 0,172, \gamma = 1,524, \beta = 0,396$$

$$\sigma_{cmax} = \frac{12 \cdot 10^6}{0,172 \cdot 200 \cdot 360^2} = 2,69 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_s = 15 \cdot 1,524 \cdot 2,69 = 61,5 \text{ N/mm}^2$$

### 3.2.2 Bøjning med normalkraft

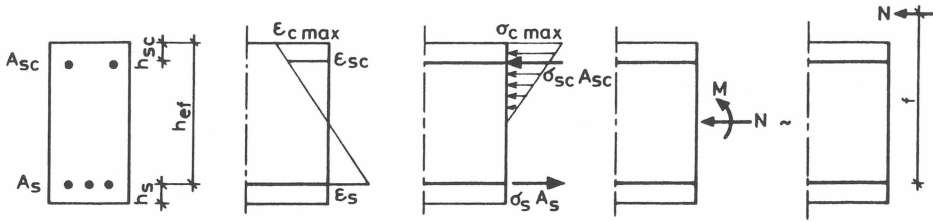
Givet:  $b$ ,  $h_{ef}$ ,  $h_s$ ,  $h_{sc}$ ,  $A_s$ ,  $A_{sc}$ ,  $\alpha$ ,  $M$ ,  $N$

Bestem:  $\sigma_{cmax}$ ,  $\sigma_s$ ,  $\sigma_{sc}$

Spændingsbestemmelsen foregår efter helt samme principper som for tilfældet ren bøjning. Men det viser sig, at bestemmelsen af nullinien ( $\beta$ ) kræver løsning af en 3. gradsligning. Det skyldes, at  $N$  nu er forskellig fra 0.

De givne snitkræfter  $M$  og  $N$ , der tænkes henført til betontværsnittets tyngdepunkt, kan ækvivaleres med en enkeltkraft  $N$  virkende i afstanden  $f$  fra trækarmringen, hvor  $f = \frac{M}{N} + \frac{h}{2} - h_s$ , se fig. 3.11.





Figur 3.11. Bøjning med normalkraft.

Statistiske betingelser:

$$\text{Proj.: } \frac{1}{2} \sigma_{cmax} \cdot b \cdot h_c + \sigma_{sc} \cdot A_{sc} - \sigma_s A_s = N \quad (1)$$

$$\text{Mom.: } \frac{1}{2} \sigma_{cmax} \cdot b \cdot h_c (h_{ef} - \frac{1}{3} h_c) + \sigma_{sc} A_{sc} (h_{ef} - h_{sc}) = N \cdot f \quad (2)$$

De fysiske og geometriske betingelser giver følgende sammenhænge

$$\text{GB + FB: } \sigma_s = \alpha \frac{h_{ef} - h_c}{h_c} \sigma_{cmax} \quad (3)$$

$$\sigma_{sc} = \alpha \frac{h_c - h_{sc}}{h_c} \sigma_{cmax} \quad (4)$$

Indsættes (3) og (4) i (1) og (2), løses (2) m.h.t. N og indsættes i (1)

$$\frac{1}{2} \sigma_{cmax} \cdot b \cdot h_c + \alpha \frac{h_c - h_{sc}}{h_c} \sigma_{cmax} \cdot A_{sc} - \alpha \frac{h_{ef} - h_c}{h_c} \sigma_{cmax} A_s =$$

$$\frac{1}{f} \left( \frac{1}{2} \sigma_{cmax} b h_c (h_{ef} - \frac{1}{3} h_c) + \alpha \frac{h_c - h_{sc}}{h_c} \sigma_{cmax} A_{sc} (h_{ef} - h_{sc}) \right)$$

$\sigma_{cmax}$  bortforkortes, og der indføres dimensionsløse størrelser:

$$\beta = \frac{h_c}{h_{ef}}, \quad \varphi = \frac{A_s}{b \cdot h_{ef}}, \quad \varphi_c = \frac{A_{sc}}{b \cdot h_{ef}}, \quad \alpha = \frac{E_s}{E_c}, \quad \delta = \frac{h_{sc}}{h_{ef}}$$

$$\begin{aligned} & \beta^3 + 3 \left( \frac{f}{h_{ef}} - 1 \right) \beta^2 + 6 \alpha [(\varphi_c + \varphi) \frac{f}{h_{ef}} - \varphi_c (1 - \delta)] \beta \\ & - 6 \alpha [(\varphi_c \delta + \varphi) \frac{f}{h_{ef}} - \varphi_c (1 - \delta) \delta] = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

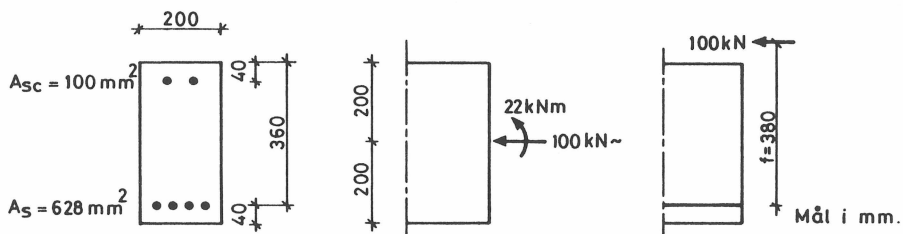
$\beta$  bestemmes af (5) ved iteration, hvorefter  $h_c = \beta \cdot h_{ef}$ . Af (2) fås nu, idet udtrykket for  $\sigma_{sc}$  fra (4) er indsat

$$\sigma_{cmax} = \frac{N \cdot f}{\frac{1}{2} b h_c (h_{ef} - \frac{1}{3} h_c) + \alpha \frac{h_c - h_{sc}}{h_c} A_{sc} (h_{ef} - h_{sc})} \quad (6)$$

$$\sigma_s = \alpha \frac{h_{ef} - h_c}{h_c} \sigma_{cmax} \quad (3)$$

$$\sigma_{sc} = \alpha \frac{h_c - h_{sc}}{h_c} \sigma_{cmax} \quad (4)$$

### Eksempel 3.3: Spændingsbestemmelse



Figur 3.12. Bøjning med normalkraft.

Givet:  $b$ ,  $h_{ef}$ ,  $h_s$ ,  $h_{sc}$ ,  $A_s$ ,  $A_{sc}$ ,  $M$ ,  $N$  jfr. figur samt  $\alpha = 15$

Bestem:  $\sigma_{cmax}$ ,  $\sigma_s$ ,  $\sigma_{sc}$

$$f = \frac{22 \cdot 10^6}{100 \cdot 10^3} + 200 - 40 = 380 \text{ mm}$$

$$\frac{f}{h_{ef}} = \frac{380}{360} = 1,056, \quad \varphi = \frac{628}{200 \cdot 360} = 0,0087,$$

$$\varphi_c = \frac{100}{200 \cdot 360} = 0,0014, \quad \delta = \frac{40}{360} = 0,111$$

Indsæt i (5):

$$\beta^3 + 0,168 \cdot \beta^2 + 0,850\beta - 0,831 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\beta = 0,62}$$

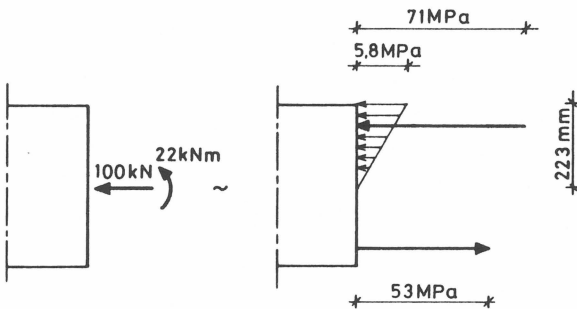
$$h_c = 360 \cdot 0,62 = 223 \text{ mm}$$

$$\underline{\sigma_{cmax}} = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 380}{\frac{1}{2} 200 \cdot 223 (360 - \frac{1}{3} \cdot 223) + 15 \frac{223-40}{223} 100 (233-40)} = \underline{5,8 \text{ N/mm}^2}$$

$$\underline{\sigma_s} = 15 \frac{360-223}{223} \cdot 5,8 = \underline{53 \text{ N/mm}^2}$$

$$\underline{\sigma_{sc}} = 15 \frac{223 \cdot 40}{223} \cdot 5,8 = \underline{71 \text{ N/mm}^2}$$

Spændingsfordelingen er vist i figur 3.13.



Figur 3.13. Spændingsfordeling.

#### 4. DIMENSIONERING AF BJÆLKER M.H.T. BØJNING, REKTANGULÆRT TVÆRSNIT

##### 4.1 Ren bøjning

##### 4.2 Bøjning med normalkraft

#### 4. DIMENSIONERING AF BJÆLKER M.H.T. BØJNING, REKTANGULÆRT TVÆRSNIT

##### 4.1 Ren bøjning, $N = 0$

En dimensionering skal ikke alene sikre, at bjælken har tilstrækkelig styrke (m.h.t. bøjning, forskydning) men også, at stabiliteten, stivheden og holdbarheden er tilstrækkelig - og økonomien i orden. Da det ofte er momentet, der er dimensionsgivende, indledes normalt med at dimensionere m.h.t. bøjning. Det er denne del af dimensioneringen, der vil blive omtalt i det følgende.

Der er uendelig mange tværsnit, som opfylder et givet krav til bøjningsstyrke. Tværsnittene vil imidlertid ikke give samme bjælkestivhed og heller ikke samme brudmåde og økonomi. Når der tages hensyn til disse forhold, begrænses antallet af muligheder.

Når det drejer sig om kontinuerlige bjælker, og snitkraftbestemmelsen foregår efter plasticitetsteorien, kræver DS 411, at bjælketværsnittet vælges således, at de dimensionsgivende tværsnit er normaltarmerede.

Når det ikke kan accepteres, at en evt. revnedannelse resulterer i én eller få store revner, må tværsnittet ikke være underarmet. Der skal altså mindst sikres en bæreevne, der svarer til den uarmerede konstruktions ( $M_u \geq M_{revne}$ ), DS 411, 6.4.3.1.

Som omtalt ovenfor vil det ofte være et normkrav, at tværsnittet er normalt armeret. Det vil som regel også være det mest økonomiske, idet det giver fuld udnyttelse af armeringen.

I det følgende bestemmes derfor først den mindste højde,  $h_{\min}$ , som en bjælke kan gives, når kravet om normalt armeret tilstand skal overholdes. Det forudsættes, at bjælkebredden er valgt.

Dernæst anføres et udtryk til bestemmelse af  $h_{ef}$ , som under hensyn til økonomi og bjælkestivhed må forventes at give et rimeligt tværsnit.

Endelig betragtes det tilfælde, hvor tværsnittet er givet, og hvor det derfor kun drejer sig om at bestemme den nødvendige armering.

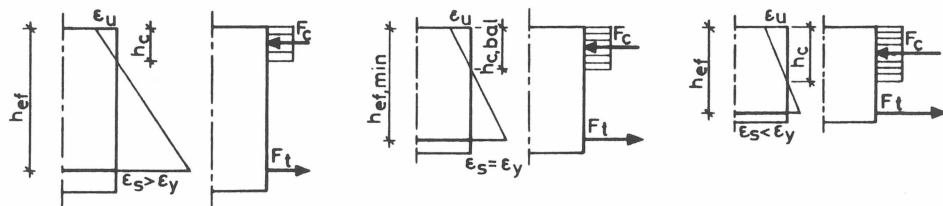
#### Bestemmelse af minimumhøjden

Givet  $M$ ,  $b$ ,  $f_{cd}$ ,  $f_{yd}$

Bestem  $h_{ef}$ ,  $A_s$

Da tværsnittet ønskes normalt armeret, skal tværsnitshøjden vælges således, at  $\epsilon_s \geq \epsilon_y$  ved brud.

Den mindste anvendelige bjælkehøjde fås, når  $\epsilon_s = \epsilon_y$ , d.v.s. når tværsnittet balancerer.



Figur 4.1. Normalt armeret, balanceret og overarmeret tværsnit.

Det ses af figuren, at tværsnittet bliver overarmeret, hvis  $h_{ef}$  vælges mindre end svarende til den balancerede tilstand, idet trykzonen skal øges, når samme moment skal kunne optages.

I det følgende bestemmes  $h_{ef, \min}$ .

Geometrisk betingelse:

Af tøjningsbilledet ses, at der generelt gælder

$$h_c = \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_u + \varepsilon_s} h_{ef} \quad (1)$$

Når tværsnittet balancerer, fås specielt

$$h_{c,bal} = \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_u + \varepsilon_y} h_{ef,min} \quad (2)$$

Statisk betingelse:

Tages moment om trækarmringen, fås generelt

$$M_u = \frac{4}{5} \cdot b h_c \cdot f_{cd} (h_{ef} - \frac{2}{5} \cdot h_c) \quad (3)$$

Når tværsnittet balancerer, fås specielt

$$M_u = \frac{4}{5} \cdot b \cdot h_{c,bal} \cdot f_{cd} (h_{ef,min} - \frac{2}{5} \cdot h_{c,bal}) \quad (4)$$

Kravet er  $M_u \geq M$ . Sættes nu  $M_u = M$ , og

indsættes (2) i (4), fås  $h_{ef,min}$

$$h_{ef,min} = \sqrt{\frac{M}{b \cdot f_{cd} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_u + \varepsilon_y} (1 - \frac{2}{5} \cdot \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_u + \varepsilon_y})}} \quad (5)$$

$h_{ef,min}$  vil afhænge af armeringstype p.g.a. forskellige  $\varepsilon_y$ -værdier

$$T \text{ (Tentor)} \quad \varepsilon_y = \frac{550}{2 \cdot 10^5} = 2,75 \cdot 10^{-3}, \quad \frac{4}{5} \cdot \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_u + \varepsilon_y} = \phi_{bal} = 0,448$$

$$Y \text{ (KS 550)} \quad \varepsilon_y = \frac{550}{2 \cdot 10^5} = 2,75 \cdot 10^{-3}, \quad \frac{4}{5} \cdot \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_u + \varepsilon_y} = \phi_{bal} = 0,448$$

$$K \text{ (KS 410)} \quad \varepsilon_y = \frac{410}{2 \cdot 10^5} = 2,05 \cdot 10^{-3}, \quad \frac{4}{5} \cdot \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_u + \varepsilon_y} = \phi_{bal} = 0,505$$

$$R \text{ (St 37)} \quad \varepsilon_y = \frac{235}{2 \cdot 10^5} = 1,17 \cdot 10^{-3}, \quad \frac{4}{5} \cdot \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_u + \varepsilon_y} = \phi_{bal} = 0,559$$

$$R^* \text{ (St 37)} \quad \varepsilon_y = \frac{225}{2 \cdot 10^5} = 1,12 \cdot 10^{-3}, \quad \frac{4}{5} \cdot \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_u + \varepsilon_y} = \phi_{bal} = 0,605$$

\* d > 16 mm

Anvendes f.eks. Tentorstål, fås

$$h_{ef,min} = \sqrt{\frac{M}{b \cdot f_{cd} \cdot 0,448(1 - \frac{1}{2} \cdot 0,448)}} = \sqrt{\frac{M}{0,35 \cdot b \cdot f_{cd}}} \quad (6)$$

I praksis vælges normalt større bjælkehøjder end svarende til  $h_{ef,min}$ , dels af hensyn til bjælkens stivhed, dels fordi det kan være mere økonomisk. Ofte benyttes

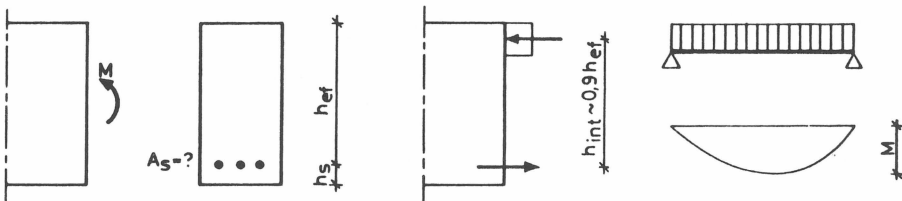
$$h_{ef} = \sqrt{\frac{M}{0,2 \cdot b \cdot f_{cd}}} \quad (7)$$

Når  $h_{ef}$  er bestemt ved anvendelse af (6) eller (7), findes armeringsarealet  $A_s$ . Det gøres f.eks. som nedenfor, idet både  $b$  og  $h_{ef}$  er kendte størrelser.

#### Dimensionering af armering i givet betontværsnit

Givet  $b, h, f_{cd}, f_{yd}, M$

Bestem  $A_s$



Figur 4.2. Bestemmelse af  $A_s$ .

Styrkekrav  $M_u \geq M$ , hvor  $M$  er det dimensionsgivende regningsmæssige moment

Strategi:

1. Skøn  $h_{ef}$
2. Skøn  $h_{int} \sim 0,9 h_{ef}$

3. Bestem en tilnærmet værdi af det nødvendige tværsnitsareal  $A_{S,nødv}$  ved at tage moment om trykresultanten

$$A_{S,nødv} f_{yd} \cdot 0,9 h_{ef} = M_u, \geq M$$

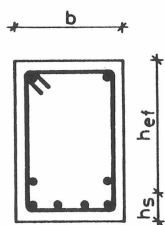
$$A_{S,nødv} \geq \frac{M}{0,9 h_{ef} \cdot f_{yd}} \quad (8)$$

hvor  $M$  er det dimensionsgivende regningsmæssige bjælkemoment.

4. Vælg en armering med et areal  $A_S \sim A_{S,nødv}$ , som kan placeres på en hensigtsmæssig måde i tværsnittet (symmetri, overholdelse af minimumafstande og dæklag).

Dimensioneringen er ikke afsluttet hermed, da den fundne værdi af  $A_S$  blot er en skønnet værdi, idet den er bestemt ud fra skønnede værdier af  $h_{ef}$  og  $h_{int}$ . Skønnet kan være dårligt, dvs. enten på den usikre side eller for meget på den sikre side. Derfor skal dimensioneringen afsluttes med en brudmomentbestemmelse, hvor det eftervises, at styrkekravet  $M_u \geq M$  er opfyldt.

Bestemmelse af  $M_u$  foregår på sædvanlig måde, idet både betontværsnit og armering kendes. Først bestemmes den korrekte værdi af  $h_{ef}$  svarende til den valgte armering, dernæst findes  $h_{int}$  o.s.v.



Figur 4.3. Placering af armering.

Når tværsnittet, som forudsat ovenfor, er givet, kan man ikke vide på forhånd, om det vil blive under-, normalt- eller overarmeret.

Hvordan kan tværsnittet gøres normaltarmet, hvis det viser sig at være

1. underarmeret?
2. overarmeret?

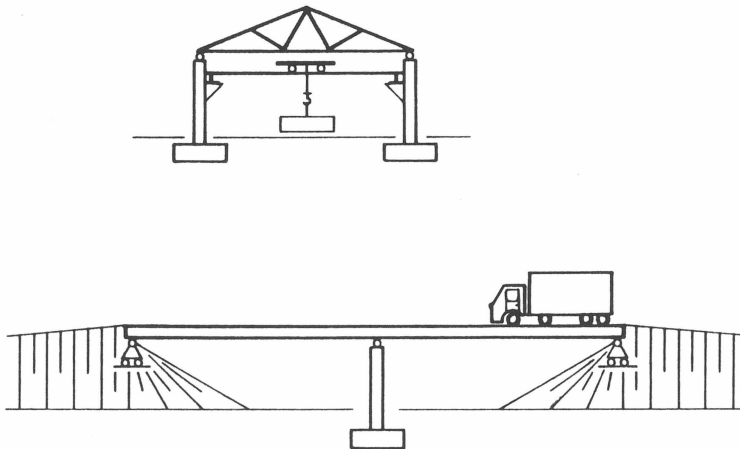


#### 4.2 Bøjning med normalkraft

Når tværsnittet påvirkes af både  $M$  og  $N$ , kan en dimensionering, hvor både betontværsnit og armering skal bestemmes, foregå på den måde, at både betontværsnit og armering skønnes. Det undersøges herefter, om det skønnede tværsnit har tilstrækkelig bæreevne ved at bestemme brudmomentet  $M_u$  svarende til den givne værdi af  $N$  og sammenligne det med det givne regningsmæssige moment  $M$ .

Hvis skønnet er godt nok, dvs.  $M_u \geq M$  svarende til den givne værdi af  $N$ , er beregningerne færdige. Hvis skønnet er dårligt, enten fordi  $M_u < M$ , eller fordi  $M_u \gg M$ , foretages et nyt skøn.

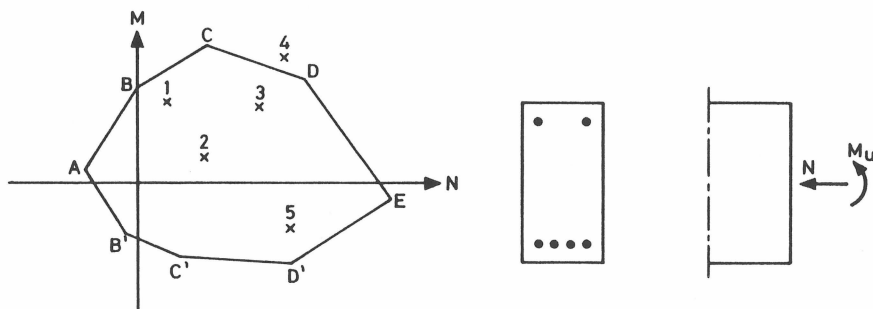
Ofte vil tværsnittet være påvirket af flere forskellige kombinationer af  $M$  og  $N$ . Det vil f.eks. være tilfældet for en søjle, som indgår i en hal konstruktion eller en brokonstruktion, jfr. fig. 4.4, idet disse konstruktioner påvirkes af egenlast, nyttelaster og naturlaster i forskellige kombinationer.



Figur 4.4. Søjle i hal- og brokonstruktion.

Det skal sikres, at tværsnittet kan optage de kombinationer af  $M$  og  $N$ , der svarer til de mulige lastkombinationer.

Det kan gøres ved, at det for hvert værdisæt af  $M$  og  $N$  efter-sees, at  $M_u > M$ . Det vil imidlertid ofte være hurtigere at be-regne og optegne tværsnittets brudbetingelse, eller dele her-af, for sammenhørende værdier af  $M$  og  $N$  (MN-diagrammet). Vedr. bestemmelse af MN-diagrammet henvises til DS 411 og f.eks. Armerede betonbjælker af Knud Christiansen, [2].



Figur 4.5.

Figur 4.5. viser et tværsnit med tilhørende MN-diagram. I diagrammet er plottet 5 lastkombinationer (x). Det ses, at tværsnittets bæreevne ikke er tilstrækkelig, da punkt 4 ligger uden for MN-kurven.

#### Spørgsmål til figur 4.4:

Angiv placeringen af det dimensionsgivende snit i søjle n.

Giv et eksempel på en lastkombination, som giver

1. en stor normalkraft
2. et stort moment.

#### Spørgsmål til figur 4.5:

Hvad kan der gøres for at forøge tværsnittets bæreevne?

Hvorfor øges  $M_u$  på strækning BC, og hvorfor falder det på strækning CD?

Fig. 4.6 - 4.8 viser MN-diagrammer beregnet v.h.j.a. et af de efterhånden mange programmer for PC, som findes på markedet i dag.

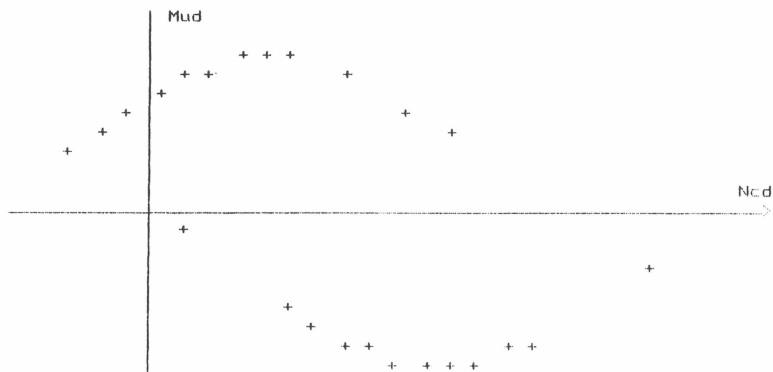
MN-diagram for rektangulært tværsnit :

Totalhøjde = 400 mm  
 Effektiv højde = 360 mm  
 Effektiv trykhøjde = 40 mm  
 Bredde = 250 mm  
 Betonstyrke = 30 N/mm<sup>2</sup>

Undersidearmering = 1884 mm<sup>2</sup> Rundjern, St.37  
 Oversidearmering = 0 mm<sup>2</sup> Rundjern, St.37

Sikkerhedsklasse : normal  
 Kontrolklasse : normal

Træk i undersiden				Træk i oversiden			
tejning %	hc mm	Ncd kN	Mud kNm	tejning %	hc mm	Ncd kN	Mud kNm
i beton	fra os.			i beton	fra us.		
-0.12	0	-317	51	: -0.12	0	-317	51
0.35	40	-183	75	: 0.35	40	133	-25
0.35	72	-76	91	: 0.35	72	556	-92
0.35	104	30	105	: 0.35	104	663	-106
0.35	136	137	116	: 0.35	136	770	-117
0.35	168	244	125	: 0.35	168	876	-126
0.35	200	350	130	: 0.35	200	983	-131
0.35	232	457	133	: 0.35	232	1090	-134
0.35	264	564	133	: 0.35	264	1196	-134
0.35	296	783	113	: 0.35	296	1303	-132
0.35	328	1002	89	: 0.35	328	1410	-126
0.35	360	1200	67	: 0.35	360	1516	-118
0.20	-	1983	-51	: 0.20	-	1983	-51



Figur 4.6. Beton 30, trækarmring St. 37, ingen trykarmring.

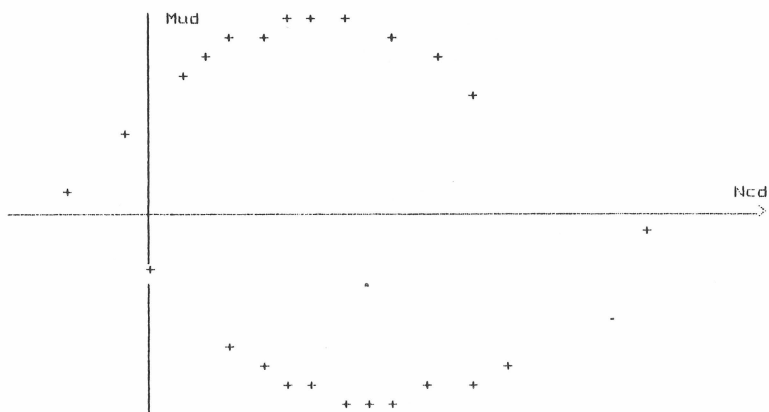
MN-diagram for rektangulært tværsnit :

Totalhøjde = 400 mm  
 Effektiv højde = 360 mm  
 Effektiv trykhøjde = 40 mm  
 Bredde = 250 mm  
 Betonstyrke = 30 N/mm<sup>2</sup>

Undersidearmering = 1256 mm<sup>2</sup> Rundjern, St.37  
 Oversidearmering = 628 mm<sup>2</sup> Rundjern, St.37

Sikkerhedsklasse : normal  
 Kontrolklasse : normal

Træk i undersiden				Træk i oversiden			
tøjning %	hc mm	Ncd kN	Mud kNm	tøjning %	hc mm	Ncd kN	Mud kNm
i beton	fra os.			i beton	fra us.		
-0.12	0	-316	17	: -0.12	0	-316	17
0.35	40	-78	58	: 0.35	40	28	-42
0.35	72	135	91	: 0.35	72	345	-92
0.35	104	241	105	: 0.35	104	452	-106
0.35	136	348	116	: 0.35	136	559	-117
0.35	168	455	124	: 0.35	168	665	-125
0.35	200	561	130	: 0.35	200	772	-131
0.35	232	668	133	: 0.35	232	879	-134
0.35	264	775	133	: 0.35	264	985	-134
0.35	296	956	119	: 0.35	296	1130	-126
0.35	328	1138	101	: 0.35	328	1274	-114
0.35	360	1305	84	: 0.35	360	1411	-101
0.20	-	1983	-17	: 0.20	-	1983	-17



Figur 4.7. Beton 30, træk- og trykarmering St. 37.

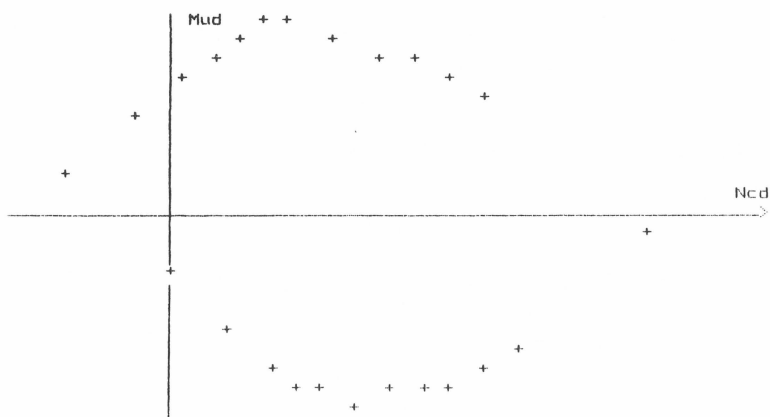
MN-diagram for rektangulært tværsnit :

-----  
 Totalhøjde = 400 mm  
 Effektiv højde = 360 mm  
 Effektiv trykhøjde = 40 mm  
 Bredde = 250 mm  
 Betonstyrke = 50 N/mm<sup>2</sup>

Undersidearmering = 1256 mm<sup>2</sup> Tentor ,T 550  
 Oversidearmering = 628 mm<sup>2</sup> Tentor ,T 550

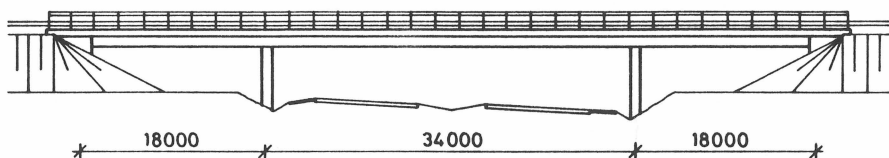
Sikkerhedsklasse : normal  
 Kontrolklasse : normal

Træk i undersiden				Træk i oversiden			
tøjning %	hc mm	Ncd kN	Mud kNm	tøjning %	hc mm	Ncd kN	Mud kNm
i beton	fra os.			i beton	fra us.		
-0.28	0	-741	39	: -0.28	0	-741	39
0.35	40	-271	119	: 0.35	40	-25	-81
0.35	72	46	169	: 0.35	72	432	-153
0.35	104	277	201	: 0.35	104	718	-193
0.35	136	459	220	: 0.35	136	904	-213
0.35	168	637	234	: 0.35	168	1081	-227
0.35	200	815	243	: 0.35	200	1259	-237
0.35	232	1140	225	: 0.35	232	1511	-230
0.35	264	1436	206	: 0.35	264	1747	-220
0.35	296	1706	187	: 0.35	296	1971	-209
0.35	328	1958	166	: 0.35	328	2187	-194
0.35	360	2197	143	: 0.35	360	2395	-176
0.20	-	3316	-29	: 0.20	-	3316	-29

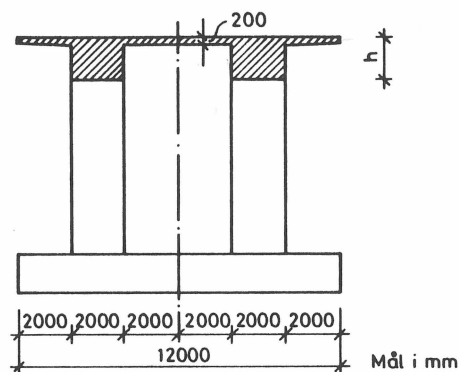


Figur 4.8. Beton 50, træk- og trykarmering T 550.

## ØVELSE 1



Figur 1. Opstalt af bro.



Figur 2. Tværsnit.

Figuren viser opstalt og tværsnit af en trefags motorvejsbro.

Tværsnittet har form som et dobbelt T-tværsnit. Pladetykkelsen er skønnet til 200 mm og bjælkebredden til 2000 mm.

Bestem ved en skitseberegning den nødvendige bjælkehøjde samt armeringen i dimensionsgivende snit.

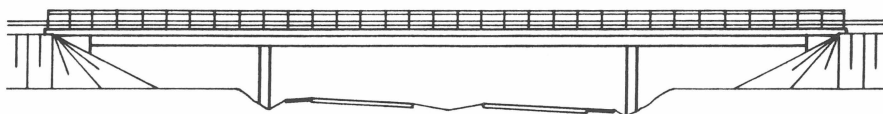
Som grundlag for skitseberegningen vælges lastkombination B.2.1.a jfr. 8.10.01 Broteknik [3].

Den permanente last består af egenlast og belægning. Der kan forudsættes anvendt 60 mm belægning med en rumvægt  $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$ . Trafiklasten består af en jævnt fordelt lodret last på  $2,5 \text{ kN/m}^2$  og af to 3-akslede lastgrupper, der fremføres parallelt.

Det kan forudsættes, at en bjælke kun påvirkes af en lastgruppe, og at denne lastgruppe kan ækvivaleres med en enkeltkraft (vurder rimeligheden af disse forudsætninger).

Materialer: Beton 30, armering T 550.

## ØVELSE 2



Figur 1. Opstalt af bro.

Brobjælken, som blev skitseberegnet i øvelse 1, ønskes undersøgt i anvendelsestilstanden.

Fra den permanente last virkende alene ønskes både nedbøjningen og den maksimale revnevidde ved fagmidte bestemt.

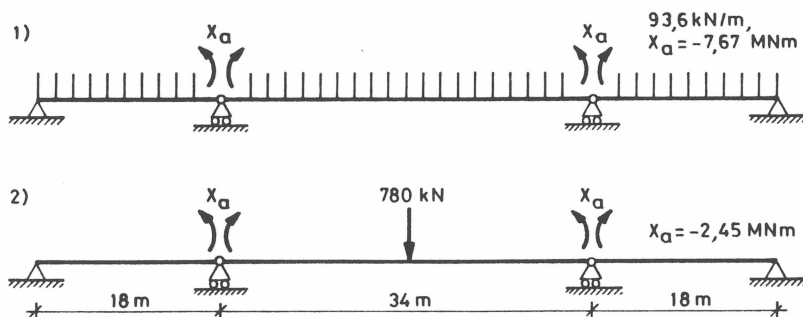
Fra den del af trafiklasten, der udgøres af den store lastgruppe (780 kN), ønskes nedbøjningen ved bjælkemidte bestemt.

Resultaterne ønskes vurderet.

Bemærk, at både snitkræfter og spændinger bestemmes v.h.j.a. elasticitetsteorien i anvendelsestilstanden.

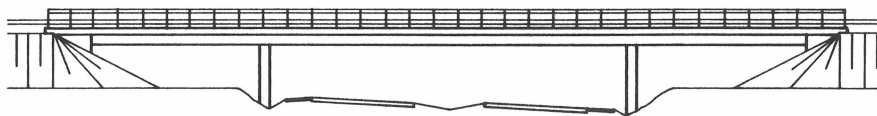
Konstruktionen er  $2 \times$  statisk ubestemt, og snitkræfterne kan f.eks. bestemmes v.h.j.a. kraftmetoden.

Resultaterne er vist i figuren nedenfor.



Figur 2. Snitkraftbestemmelse.

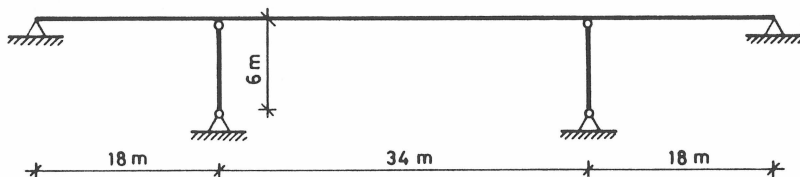
## ØVELSE 3



Figur 1. Opstalt af bro

Figur 1 viser den samme bro, som blev behandlet i øvelse 1 og 2.

I denne øvelse ønskes foretaget en skitseberegning af søjlerne (dvs. bestemmelse af betontværsnit og armering). Broens statiske system er valgt som vist i fig. 2. Vandrette kræfter i broens længde- og tværretning overføres til landfæsterne. Søjlerne regnes forbundet til dæk og fundamenter gennem charnierer, og søjlenormalkraften forudsættes at virke centralt. Der placeres en søjle under hver bjælke. Af æstetiske grunde vælges søjlebredden til 2000 mm som vist i figuren i øvelse 1.



Figur 2. Statisk model af bro.

Som grundlag for skitseberegningen vælges lastkombination B.2.1.a:

$$1,0 \text{ Permanent} + 1,3 \cdot \text{Trafik} + 0,5 \text{ bremselast}$$

Materialer: Beton 30, armering k 410.



## ØVELSE 4

I øvelse 3 blev foretaget en skitseberegning af søjlerne på grundlag af lastkombination B.2.1.a.

I denne øvelse ønskes det kontrolleret, om søjletværsnittet fundet i øvelse 3 er tilstrækkeligt til at optage lastkombination B.3.2.

Dvs.  $1,0 \cdot \text{permanent last} + 1,0 \cdot \text{påkørselslast}$ .

Hvis tværsnittet ikke er tilstrækkeligt, ønskes det nødvendige tværsnit bestemt.

- 1) Undersøgelsen foretages først ved anvendelse af metode II.
- 2) Dernæst benyttes metode I, og resultaterne sammenlignes.

Materialer: Beton 30, armering k 410.

Geometri: Se øvelse 3, fig. 2.

## LITTERATURFORTEGNELSE

- [1] M.P. Nielsen: Beton 1, del 2, Aalborg 1974.
- [2] Knud Christiansen: Armerede betonbjælker, Danmarks Ingeniørakademi, december 1983.
- [3] 8.10.01 Broteknik, Vejdirektoratet, oktober 1984.









